2η Άσκηση Άλγεβρας Α΄ Λυκείου

2022-2023

Διάταξη πραγματικών αριθμών

Δίνεται η παράσταση $A = 2\alpha^2 - 2\alpha + 1$ με $\alpha \in [0,1]$.

α) Να γράψετε την παράσταση Α ως άθροισμα δύο τετραγώνων.

β) Χρησιμοποιώντας για την παράσταση Α την μορφή $A = 2\alpha^2 - 2\alpha + 1$:

i) Να βρείτε πότε η παράσταση Α παίρνει την τιμή 1.

ii) Να αποδείξετε ότι $-1 < A < 3$.

γ) Χρησιμοποιώντας για την παράσταση Α την μορφή που παίρνει ως άθροισμα δύο τετραγώνων:

i) Να εξετάσετε αν η παράσταση Α παίρνει την τιμή μηδέν.

ii) Να αποδείξετε ότι μπορεί η παράσταση Α να βρίσκεται μεταξύ των τιμών 0 και 2 .

iii) Να αποδείξετε ότι τελικά ότι $0 < A \leq 1$.

iv) Στα ερωτήματα β) ii) και β) iii) γιατί προκύπτουν δύο διαφορετικές ανισώσεις; Τι είναι αυτό που διαφοροποιεί την πορεία της άσκησης;

δ) Να αποδείξετε ότι $A \geq \frac{1}{2}$.

ε) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης Α.

στ) Τι συμπέρασμα βγάζετε από την πορεία των ερωτημάτων της άσκησης; Γιατί δημιουργούνται διαφορετικές ανισότητες; Είναι λανθασμένη κάποια από αυτές; Αρκεί μία ανισότητα για να βρούμε την μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή μίας παράστασης; Τι συμπεραίνετε για την διαδικασία εύρεσης της μέγιστης και ελάχιστης τιμής μίας παράστασης;

Νίκος Τούντας

Askisopolis

Λύση

α) Είναι $\mathrm{A} = 2\alpha^2 - 2\alpha + 1 = \alpha^2 + \alpha^2 - 2\alpha + 1 = \alpha^2 + (\alpha - 1)^2$

β) i) $\mathrm{A} = 1 \Leftrightarrow 2\alpha^2 - 2\alpha + \cancel{1} = \cancel{1} \Leftrightarrow 2\alpha(\alpha - 1) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = 0$ ή $\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\alpha = 1$

ii) Είναι $0 \le \alpha \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \alpha^2 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 2\alpha^2 \le 2$ (1) και $0 \le \alpha \le 1 \Leftrightarrow -2 \le -2\alpha \le 0 \Leftrightarrow -1 \le -2\alpha + 1 \le 1$ (2)
Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1),(2) προκύπτει $-1 < 2\alpha^2 - 2\alpha + 1 < 3 \Leftrightarrow -1 < \mathrm{A} < 3$

γ) i) Είναι $\alpha^2 \ge 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\alpha = 0$ και $(\alpha - 1)^2 \ge 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$.
Άρα $\mathrm{A} = \alpha^2 + (\alpha - 1)^2 \ge 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\alpha = 0$ και $\alpha = 1$ πράγμα αδύνατο.
Άρα τελικά $\mathrm{A} \ne 0$ επομένως είναι $\mathrm{A} > 0$.

ii) Είναι $0 \le \alpha \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \alpha^2 \le 1$ (3) και $0 \le \alpha \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \alpha - 1 \le 0 \Leftrightarrow 0 \le (\alpha - 1)^2 \le 1$ (4)
Προσθέτοντας κατά μέλη τις (3),(4) προκύπτει $0 \le \alpha^2 + (\alpha - 1)^2 \le 2 \Leftrightarrow 0 \le \mathrm{A} \le 2$
Από το προηγούμενο ερώτημα ισχύει $\mathrm{A} > 0$ άρα $0 < \mathrm{A} \le 2$.
Επειδή $0 \le \alpha^2 \le 1$ είναι $\alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$ και αντίστοιχα επειδή $0 \le (\alpha - 1)^2 \le 1$ είναι
$(\alpha - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha - 1 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 0$ άρα για να ισχύει $\alpha^2 + (\alpha - 1)^2\, 2 \Leftrightarrow \mathrm{A} = 2$ πρέπει $\alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$ και
$(\alpha - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha - 1 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 0$ πράγμα αδύνατο άρα $0 < \mathrm{A} < 2$.

iii) Είναι $0 \le \alpha \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \alpha^2 \le \alpha$ (5)
Είναι $0 \le \alpha \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \alpha - 1 \le 0 \Leftrightarrow -(\alpha - 1) \ge (\alpha - 1)^2 \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le (\alpha - 1)^2 \le 1 - \alpha$ (6)
Προσθέτοντας κατά μέλη τις (5),(6) προκύπτει $0 \le \alpha^2 + (\alpha - 1)^2 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \mathrm{A} \le 1$

Από β) i) ερώτημα η παράσταση Α παίρνει την τιμή 1 όμως από γ) i) ερώτημα είναι $\mathrm{A} > 0$ άρα $0 < \mathrm{A} \le 1$

iv) Στην περίπτωση του γ) ii) ερωτήματος παίρνουμε την βασική αρχική ανισότητα και την υψώνουμε στο τετράγωνο ενώ στην περίπτωση του γ) iii) πολλαπλασιάζουμε με τους αριθμούς α και $\alpha - 1$ αντίστοιχα.

δ) Είναι $\mathrm{A} \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\alpha^2 - 2\alpha + 1 \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4\alpha^2 - 4\alpha + 2 \ge 1 \Leftrightarrow 4\alpha^2 - 4\alpha + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (2\alpha - 1)^2 \ge 0$ ισχύει

ε) Είναι $\mathrm{A} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (2\alpha - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$ άρα η παράσταση Α παίρνει την τιμή $\frac{1}{2}$
άρα ισχύει $\frac{1}{2} \le \mathrm{A} \le 1$ με τις ισότητες να ισχύουν άρα η ελάχιστη τιμή της Α είναι το $\frac{1}{2}$ και η μέγιστη τιμή της Α το 1.

στ) Κάθε ανισότητα δημιουργείται με διαφορετικό τρόπο, κάποιες υψώνοντας στο τετράγωνο και κάποιες πολλαπλασιάζοντας με έναν αριθμό. Προφανώς δεν είναι καμία ανισότητα λανθασμένη. Απλά κάποια είναι πιο ισχυρή από κάποια άλλη. Για την εύρεση της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής μίας παράστασης θα πρέπει να γνωρίζουμε ότι η παράσταση μπορεί να πάρει και την αντίστοιχη τιμή. Δεν αρκεί μόνον να είναι μικρότερη ίση ή μεγαλύτερη ίση αντίστοιχα από αυτήν.

Για παράδειγμα με φυσικούς αριθμούς. Αν $\mathrm{B} = 1 + 2 = 3$ είναι $\mathrm{B} \le 4$ όμως επειδή δεν ισχύει η ισότητα δεν είναι μέγιστη τιμή το 4.

Askisopolis